Segunda Prova de Teoria Eletromagnética I, 18/10/2010

Nome:____

(1ª questão) *(4,0 pontos)*

Considere a expansão de multipolos para o potencial eletrostático $V(\vec{r})$ de uma distribuição localizada de cargas com densidade $\rho(\vec{r}\,')$ em um volume $\mathcal{V}$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{\mathcal{V}}(r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\vec{r}\,')d\tau' \,,$$

onde θ' é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, com o polinômio de Legendre $P_n(\cos\theta')$ sendo obtido através fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

(a) *(2,0 pontos)* Mostre que o termo de quadrupolo da expansão acima pode ser escrito como

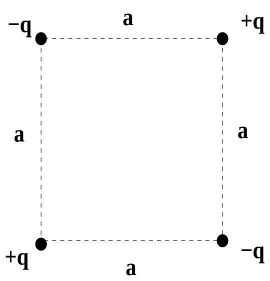
$$V_{\text{quad}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{r_i r_j}{r^2}Q_{ij} \,,$$

onde r_i é a componente i do vetor $\vec{r}$ e Q_{ij} é o momento de quadrupolo

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{V}}\left[3r_i' r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right]\rho(\vec{r}\,')d\tau',$$

com δ_{ij} denotando o delta de Kronecker e r_i' a componente i do vetor $\vec{r}\,'$.

(b) *(2,0 pontos)* Determine todas as componentes do momento de quadrupolo Q_{ij} de um quadrupolo elétrico de lado a, cargas individuais de módulo q e localizado no plano xy conforme figura abaixo:



(2ª questão) *(2,0 pontos)*

Considere uma distribuição de carga cujo potencial eletrostático, dado em coordenadas esféricas, depende exclusivamente da variável θ [ou seja, $V = V(\theta)$], onde θ é o ângulo formado entre o semieixo positivo Z e o vetor posição $\overrightarrow{r}$. Determine a solução geral da equação de Laplace para $V(\theta)$, identificando em particular as constantes a serem fixadas pelas condições de contorno.

(3ª questão) *(4,0 pontos)*

Um cilindro de raio R muito longo feito de material dielétrico linear e homogêneo de susceptibilidade χ_e é colocado em um campo inicialmente uniforme $\vec{E}_0$. O eixo do cilindro é perpendicular a $\vec{E}_0$.

(a) *(1,0 ponto)* Escreva as condições de contorno a serem obedecidas pelo potencial na superfície do cilindro e para distâncias muito maiores que o raio do cilindro (condição de contorno no infinito).

(b) *(2,0 pontos)* Encontre o campo elétrico resultante dentro do cilindro.

(c) *(1,0 ponto)* Mostre, a partir da expressão obtida no item *(b)*, que o campo dentro do cilindro produz os resutlados esperados nos limites de χ_e para um material condutor e para o caso em que removemos o dielétrico do espaço.

Dado útil: A solução geral da equação de Laplace, assumindo-se simetria cilíndrica, é

$$V(s,\phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{k=1}^{\infty} \left[s^k \left(a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi\right) + s^{-k} \left(c_k \cos k\phi + d_k \sin k\phi\right) \right].$$